Wie lange muss ein Ei kochen?

R. Berger u. D. Schwarz

1 I Einleitung

Möchte man ein hart gekochtes Ei haben, so weiß man zunächst nicht so genau, wie lange es mindestens kochen muss, bis Eiweiß und Eigelb geronnen sind. Aus Gründen der Energieeinsparung ist es sicherlich vernünftig, nur so lange zu erwärmen, bis das Eigelb die Gerinnungstemperatur von ca. 68 °C erreicht hat. Natürlich ist es nicht sinnvoll, jedes Mal ein Thermometer einzuführen, um den entsprechenden Zeitpunkt zu ermitteln. Dies wäre viel zu aufwendig und es bestünde die Gefahr des Bruchs. Wir suchen daher nach einem leicht zu messenden charakteristischen Parameter, der eine Vorhersage der Größenordnung der notwendigen Zeitspanne erlaubt. Alle Eier sind natürlich verschieden. Sie unterscheiden sich in der Größe und der Form. Zusätzlich hängt die innere Beschaffenheit z. B. auch vom Alter ab – im Laufe der Zeit nimmt der Wassergehalt ab. Dies hat wiederum Einfluss auf die Wärmeleitfähigkeit sowie die Dichte und Wärmekapazität. Wir versuchen im Folgenden aus der (leicht messbaren) *Größe* eines Eies auf die notwendige Erwärmungsdauer zu schließen. Wie hängt die Erwärmungszeit jedoch von diesem Parameter ab? Eine genaue Rechnung liegt außerhalb der Möglichkeiten der Schule. Denn die Temperatur ist eine Funktion sowohl des Ortes als auch der Zeit. Bereits für den hochsymmetrischen Fall eines kugelförmigen Objekts muss die Lösung einer partiellen Differenzialgleichung bestimmt werden, die wiederum recht komplex ist. Nichtsdestotrotz lässt sich mittels einer einfachen Abschätzung zeigen, dass die Dauer für die Erwärmung für eine Kugel *quadratisch* vom Radius abhängt. Dieser Zusammenhang wird durch einfach durchzuführende Messungen an Eiern unterschiedlicher Größe unterstützt. Ein Vergleich mit der exakten Lösung zeigt die Brauchbarkeit der gegebenen Abschätzung. Der vorgestellte Weg zeigt beispielhaft einen einfachen quantitativen Zugang zu vielfach vorkommenden Nichtgleichgewichtsvorgängen in Natur, Alltag und Technik.

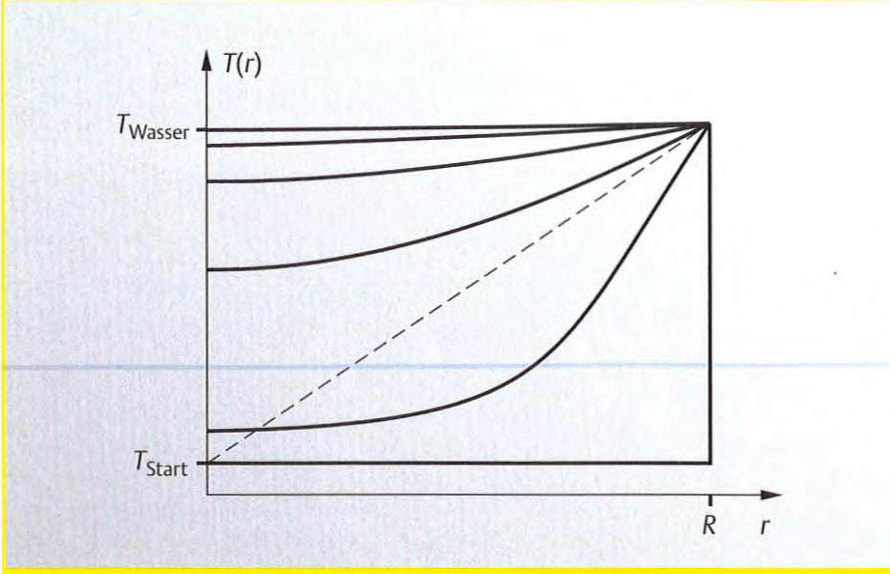

Abb. 1: Temperaturverlauf im kugelförmigen Ei mit Radius R für verschiedene Zeitpunkte nach dem Einlegen in heißes Wasser. Gestrichelt ist die verwendete zeitunabhängige Näherung für den Temperaturverlauf dargestellt. T_{Start} bezeichnet die Temperatur des Eies unmittelbar vor dem Einlegen in das heiße Wasser.

2 I Abhängigkeit der Erwärmungszeit von der Größe

Die Geschwindigkeit der Temperaturerhöhung eines Eies hängt kritisch von dessen Größe ab: Je größer ein Ei ist, desto länger dauert der Wärmetransport ins Innere. Die Frage ist nun, in welcher Weise die Größe Einfluss auf die Erwärmungszeit nimmt. Wir schätzen dazu zunächst ab, welche Zeitspanne benötigt wird, um das Innere des Eies auf die Temperatur des siedenden Wassers zu erwärmen. Wir werden sehen, dass dies die richtige Größenordnung für die Erwärmungszeit liefert, und insbesondere die korrekte Abhängigkeit von der Eigröße.

Welche Zeit wird benötigt, um die Mitte des Eies auf die Gerinnungstemperatur $T_{Gerinnung, Mitte}$ zu bringen? Wir nehmen dazu im Folgenden an, dass die Erwärmung wesentlich durch Wärmeleitung bestimmt wird und die Konvektion aufgrund der recht großen Zähigkeit des Materials weitgehend unterdrückt ist. Der Einfachheit halber setzen wir außerdem voraus, dass das Ei homogen sei und Kugelform habe. Beide Näherungen sind natürlich recht grob, denn nicht nur die Schale, sondern auch Eigelb und Eiweiß haben unterschiedliche thermische Parameter. Um die Grundidee der verwendeten Näherung zu erfassen, betrachten wir Abb. 1.

Für verschiedene Zeitpunkte ist dort die Temperatur als Funktion des Abstands vom Mittelpunkt des als kugelförmig angenommenen Eies dargestellt. Hat man zum Zeitpunkt $t = 0$ noch einen Sprung der Temperatur von ihrem Wert im Inneren des Eis T_{Start} zur Temperatur des Wassers T_{Wasser} am Rand der Kugel, so strömt mit zunehmender Zeit immer mehr Wärme zu und erhöht die Temperatur im Inneren des Eies immer weiter. Der Wärmestrom in das Ei hinein ist proportional zum räumlichen Temperaturgefälle an der Oberfläche des Eies. Das Fouriergesetz drückt dies in mathematischer Form aus: Die Wärmestromdichte, also die Wärmeleistung pro Flächeneinheit ist durch

$$j = \lambda \left(\frac{dT}{dr} \right)_{r=R}$$

gegeben. λ ist die Wärmeleitfähigkeit. Hier erkennt man nun, worin das Problem einer exakten Lösung im Wesentlichen begründet ist: Das Temperaturgefälle ändert sich permanent mit der Zeit. Dies drückt sich durch eine abnehmende Steigung der $T(r)$-Graphen in Abb. 1 aus: Am Anfang ist die Steigung bei $r = R$ extrem groß und der Wärmestrom dem entsprechend hoch. Ist

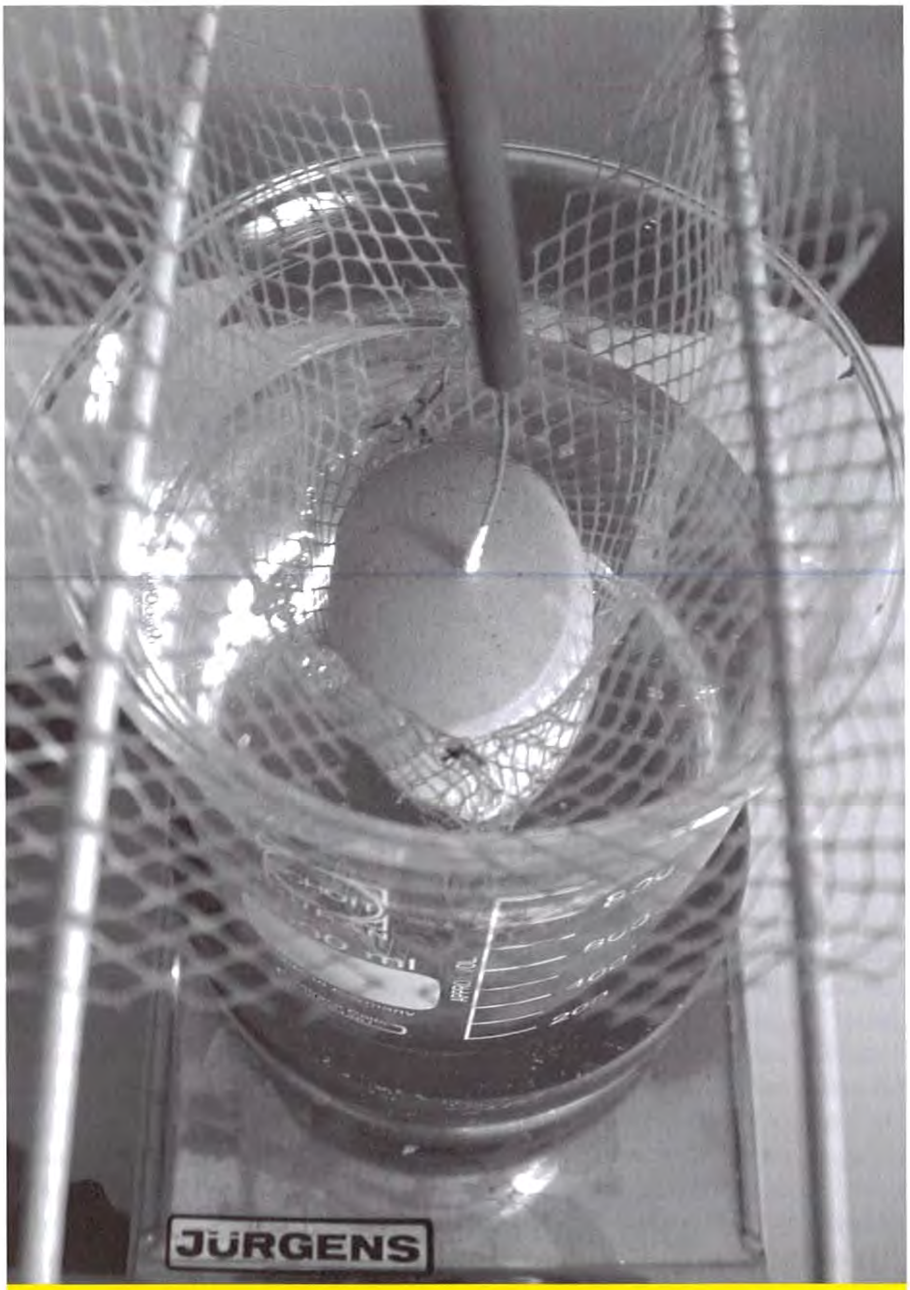

Abb. 2: Versuchsaufbau. Das Ei wird, von einem kleinen Netz gehalten, in das siedende Wasser so eingetaucht, dass es gerade mit Wasser bedeckt ist. Dadurch bekommt der Temperatursensor selbst keinen direkten Kontakt mit dem Wasser. Die Wassertemperatur wird durch eine Herdplatte näherungsweise konstant gehalten. Die Temperatur im Mittelpunkt des Eies wurde mit einem nur an der Spitze sensiblen elektrischen Messfühler[1] erfasst und mit dem CASSY-Interface der Firma LEYBOLD aufgezeichnet. Der Temperatursensor folgt aufgrund seiner geringen Masse und Wärmekapazität dem Temperaturverlauf fast ohne Zeitverzögerung. Die weiße Markierung diente zur präzisen Einführung der Sonde bis zum Mittelpunkt des Eies und dazu, einen direkten Kontakt der Sonde mit dem siedenden Wasser zu verhindern.

das Ei schon weitgehend erwärmt, so werden die Steigung und damit der Wärmestrom immer kleiner. Für unsere Überschlagsrechnung machen wir nun eine sehr grobe Näherung: Wir nehmen einen zeitunabhängigen Temperaturverlauf im Inneren des Eies an entsprechend der gestrichelten Linie in Abb. 1. Dies hat den Vorteil, dass wir mit einem zeitlich konstanten Temperaturgefälle rechnen können, und damit die Zeitabhängigkeit eliminiert haben. Das Temperaturgefälle am Rand des Eies ist dann

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)_{r=R} = \frac{T_{\text{Wasser}} - T_{\text{Start}}}{R}.$$

Was rechtfertigt eine derart grobe Näherung? Wir erwarten, dass sie möglicherweise nicht so schlecht ist. Denn am Anfang wird der Wärmestrom zwar stark unterschätzt, gegen Ende der Erwärmung überschätzen wir jedoch den Wärmestrom. Man erkennt dies in Abb. 1 am Vergleich der Temperaturgefälle im Ei zu verschiedenen Zeitpunkten mit der gestrichelt dargestellten Näherung. Für den Wärmestrom durch die Oberfläche des als kugelförmig angenommenen Eies gilt dann

$$P = jA = \lambda \frac{T_{\text{Wasser}} - T_{\text{Start}}}{R} 4\pi R^2.$$

Wie groß ist die zugeführte Energie? Wir nehmen dazu an, dass das Ei der Anfangstemperatur T_{Start} komplett auf die Temperatur des umgebenden heißen Wassers erwärmt wird. Die insgesamt zugeführte innere Energie ist dann

$$\begin{aligned}\Delta U &\approx c\, m\, \Delta T\\ &\approx c\,\rho \frac{4}{3}\pi R^3 \left(T_{\text{Wasser}} - T_{\text{Start}}\right),\end{aligned}$$

wobei c die spezifische Wärmekapazität des Eies und ρ dessen Massendichte bezeichnet. Wir schätzen die Temperaturausgleichszeit aus den beiden Ausdrücken zu

$$\Omega = \frac{\Delta U}{P} = \frac{R^2}{3D} \qquad (1)$$

mit der sogenannten *Temperaturleitfähigkeit*

$$D = \frac{\lambda}{c\rho}.$$

Die Zeit für den Temperaturausgleich ist demnach proportional zum Quadrat des Radius. Natürlich dürfen wir von einer derart groben Abschätzung keine genauen Zahlenwerte für die Erwärmungsdauer erwarten. Nichtsdestotrotz entspricht die ermittelte Abhängigkeit vom Radius auch den Ergebnissen einer exakten Rechnung (vgl. Abschnitt 4).

3 I Experimentelle Prüfung

Wir prüfen nun experimentell an einer Reihe von Eiern nach, ob die theoretisch gefundene Abhängigkeit den tatsächlichen Sachverhalt ungefähr widerspiegelt. Wir haben dazu jeweils die Temperatur in der Mitte des Eies als Funktion der Zeit bestimmt. Dazu verwendeten wir den Versuchsaufbau aus Abb. 2.

Da Eier natürlich mehr oder weniger von einer Kugelform abweichen, stellt sich die Frage, welche Größe wir als Radius verwenden. Wir wählen näherungsweise den Mittelwert der Längs- und der Queraus-

[1] Schneller Temperaturfühler NiCr-Ni für Gase der Firma Leybold Didactic (Katalog-Nr. 666 216)

dehnung. Wir machen das Vorgehen an einem der untersuchten Eier deutlich. Dazu betrachten wir den Temperaturverlauf im Inneren des Eies „Nr. 3" als Funktion der Zeit (Abb. 3).

Die Gerinnungstemperatur des Eigelbs von 68 °C wird nach 430 s erreicht. Die Längs- bzw. Querachse des Eies „Nr. 3" haben einen Wert von 52,7 bzw. 40,6 mm. Daraus ergibt sich ein Mittelwert von $\bar{R} = 23,3$ mm. Analoge Messungen führen zu den Werten der Tab. 1.

In Abb. 4 sind die Zeitspannen bis zum Erreichen der kritischen Temperatur als Funktion des Quadrats des mittleren Radius aufgetragen. Die entsprechenden Werte wurden der Tab. 1 entnommen. Eingetragen ist zusätzlich die Ausgleichsgerade durch den Ursprung[2]. Abweichungen vom theoretisch vermuteten Zusammenhang in Abb. 4 können eine Reihe von Ursachen haben. Zunächst weichen die Eier mehr oder weniger von einer Kugelform ab. Auch die Annahme eines mittleren Radius korrigiert dies nur in beschränktem Maße[3].

Darüber hinaus könnte auch das Alter der Eier eine Rolle spielen: Nimmt der Wassergehalt immer weiter ab, so ändert sich dem entsprechend auch die Temperaturleitfähigkeit des Eies. Nicht berücksichtigt wurde auch die Schale des Eies, die sicherlich deutlich andere thermische Eigenschaften als Eigelb und Eiweiß hat.

[2] *Für extrem kleine Eier (R → 0) geht die Erwärmungsdauer natürlich gegen Null.*

[3] *Dies erkennt man leicht, wenn man sich ein (hypothetisches) Ei mit sehr großer Längs- und sehr kleiner Querachse vorstellt. Die Erwärmungsdauer dieses scheibenartigen Gebildes wird natürlich wesentlich vom kleineren Durchmesser bestimmt.*

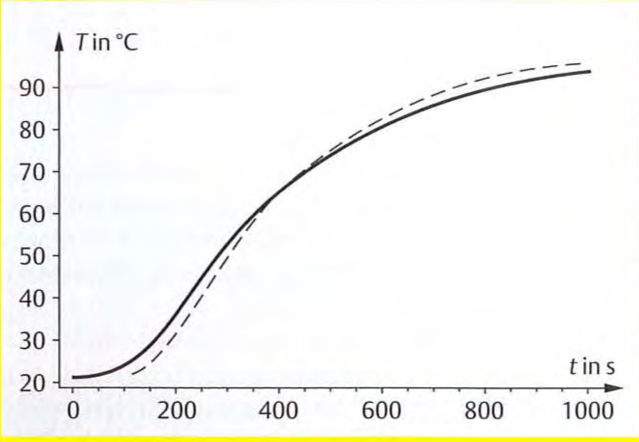

Abb. 3: Temperaturverlauf des Eies „Nr. 3". Die Messung wurde unmittelbar nach dem Einlegen gestartet. Die Gerinnungstemperatur von 68 °C wurde nach 430 s erreicht. Gestrichelt ist das theoretische Ergebnis unter Annahme eines kugelförmigen Eies dargestellt, welches weiter unten im Text beschrieben wird.

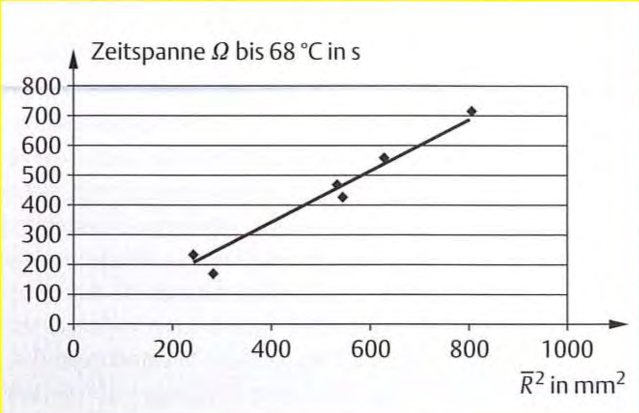

Abb. 4: Gemessene Zeitspannen bis zum Erreichen der Gerinnungstemperatur des Eigelbs aufgetragen gegen das Quadrat des mittleren Radius. Die Werte liegen näherungsweise auf der Ausgleichsgeraden durch den Nullpunkt. Dies entspricht der in unserer Abschätzung erwarteten Abhängigkeit. Die Ausgleichsgerade (in Sekunden) ist durch $\Omega = 0{,}8578\,\bar{R}^2$ gegeben. Der mittlere Radius ist dabei in Millimetern anzugeben.

Die Ausgleichsgerade ist durch die Formel

$$\Omega = 0{,}86\bar{R}^2$$

in Sekunden gegeben, wenn der mittlere Radius in Millimetern eingesetzt wurde. Durch Messung der Größe eines Eies lässt sich mithilfe dieser Formel die minimale Kochzeit näherungsweise vorhersagen und so überflüssiger Energieeinsatz vermeiden.

Ei-Nummer	Länge bzw. Höhe in mm	Mittlerer Radius in mm	Gemessene Zeitspanne Ω bis zum Erreichen der Gerinnungstemperatur in s
1	68,0 x 45,0	28,3	711
2	57,6 x 42,5	25,0	557
3	52,7 x 40,6	23,3	430
4	51,4 x 41,1	23,1	461
5	37,6 x 29,3	16,7	168
6	33,9 x 28,0	15,5	228

Tab. 1: Größe der untersuchten Eier und experimentell ermittelte Zeitspannen bis zum Erreichen der Gerinnungstemperatur des Eigelbs (68 °C).

	Wärmeleitfähigkeit λ in W/(m K)	Spezifische Wärmekapazität c in J/(kg K)	Temperaturleitfähigkeit[4] $D = \lambda/(c\rho)$ in mm²/s
Eiweiß	0,5573	3850	0,14
Eigelb	0,3392	2810	0,11

Tab. 2: Thermische Eigenschaften der Bestandteile von Eiern (siehe [2]).

4 Theoretische Vertiefung

Wir haben in unserer Abschätzung für die Temperaturausgleichszeit die komplizierten Verhältnisse beim Erwärmen deutlich reduziert. Denn tatsächlich hängt ja die Temperatur im Inneren des Eies sowohl von der Position als auch von der Zeit ab. Für einen vertieften Einblick gehen wir nun von der exakten Lösung des Problems der Erwärmung einer homogenen Kugel aus und vergleichen diese mit unserer einfache Näherung.

Unsworth und *Duarte* (siehe [1]) lösen dazu die Wärmeleitungsgleichung und geben folgenden Ausdruck für die Temperatur im Mittelpunkt einer homogenen Kugel T_{Mitte} an:

$$\frac{T_{Wasser} - T_{Mitte}(t)}{T_{Wasser} - T_{Start}} = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\exp\left(-n^2\frac{t}{\tau}\right) \qquad (2)$$

[4] *Zur Berechnung der Temperaturleitfähigkeit wird die von uns ermittelte Massendichte von 1070 kg/m³ verwendet.*

mit

$$\tau = \frac{R^2}{\pi^2 D}$$

Dabei sind sie davon ausgegangen, dass die Oberflächentemperatur des Eies konstant gleich der des umgebenden Wassers ist. Dies ist natürlich nur näherungsweise der Fall, da das kühle Ei die direkt angrenzende Wasserschicht etwas abkühlt. In Abb. 3 wurde mithilfe dieser Formel das experimentelle Ergebnis unter Variation der Temperaturleitfähigkeit möglichst genau angepasst. Man erkennt jedoch deutliche Abweichungen vom tatsächlichen Verlauf. Letztlich sind die Verhältnisse eben wesentlich komplexer als für die Herleitung der Formel angenommen. Beispielsweise hat ein Ei eben keine Kugelform und besteht aus verschiedenen Materialien mit je eigener Temperaturleitfähigkeit. So ist der bei der Anpassungsprozedur ermittelte Parameter für die Temperaturleitfähigkeit mit 0,2 mm^2/s doch deutlich größer als die Temperaturleitfähigkeiten sowohl des Eiweißes als auch des Eigelbs (vgl. Tab. 2).
Um die Verhältnisse weiter zu vereinfachen, machen wir uns klar, dass zum Zeitpunkt $t = \tau$ der zweite Summand in Gleichung (2) um den Faktor

$$\frac{\exp(-2^2)}{\exp(-1^2)} \approx 0{,}05$$

kleiner ist als der erste und damit zusammen mit den höheren Summanden zu dem uns interessierenden späten Zeitpunkt der Gerinnung des Eigelbs vernachlässigbar ist. Berücksichtigt man daher nur den ersten Summanden der unendlichen Reihe, so erhält man für hinreichend große Zeiten

$$\frac{T_{\text{Wasser}} - T_{\text{Mitte}}(t)}{T_{\text{Wasser}} - T_{\text{Start}}} \approx 2\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Die Zeitspanne $t = \Lambda$ bis zur Gerinnung des Mittelpunkts ergibt sich damit zu

$$\Lambda = \frac{R^2}{\pi^2 D} \ln\left[2\frac{T_{\text{Wasser}} - T_{\text{Start}}}{T_{\text{Wasser}} - T_{\text{Mitte}}^{\text{Gerinnung}}}\right].$$

Nehmen wir an, das Ei habe zu Beginn Zimmertemperatur ($T_{\text{Start}} = 20$ °C) und werde in siedendes Wasser der Temperatur $T_{\text{Wasser}} = 100$ °C gelegt. Die Zeitspanne bis zum Gerinnen des Eigelbs ($T_{\text{Gerinnung, Mitte}} = 68$ °C) beträgt dann

$$0{,}16\frac{R^2}{D}.$$

Nach unserer groben Abschätzung für Ω ist die Zeit nach Gleichung (1) durch

$$\frac{R^2}{3D}$$

gegeben. Unsere einfache Abschätzung liefert also nicht nur die korrekte Abhängigkeit vom Radius, sondern auch die richtige Größenordnung der notwendigen Erwärmungsdauer selbst.

5 I Diskussion

In Natur und Alltag finden sich viele interessante und bedeutsame Vorgänge, die nicht als Gleichgewichtsvorgänge beschrieben werden können. Am Beispiel der Erwärmung von Eiern wurde gezeigt, wie durch Wärmeleitung beschriebene Vorgänge auch quantitativ für die Schule zugänglich gemacht werden können, wenn insbesondere die funktionale Abhängigkeit von den charakteristischen Ausdehnungen eines Objekts von Interesse ist.
Analoge Abschätzungen wie im Beitrag vorgestellt sind für viele Anwendungen hilfreich. Sie können direkt auch auf die Verhältnisse beim Braten übertragen werden (siehe [3]). Aber auch das Eindringen von Temperaturschwankungen in den Boden oder die Absorption von Schallwellen können durch diesen Ansatz behandelt werden (vgl. [4]). Aufgrund der weitgehenden strukturellen Analogie lassen sich auch Diffusionsvorgänge auf diese Weise erfassen. Mit Blick auf die „Physik der Eier" sind vielfältige Erweiterungen denkbar. So geht *C. D. H. Williams* der Frage nach, wie lange ein „Drei-Minuten-Ei" gekocht werden muss[5].
Zum Abschluss soll noch auf die manchmal geäußerte Vermutung eingegangen werden, wonach der Gerinnungsvorgang des Eiweißes, welcher einer Art Phasenübergang entspricht, dazu führe, dass sich die Temperatur für längere Zeit nicht weiter erhöhe, und damit die Kochzeit entscheidend verlängert würde[6]. Die Gerinnungsenthalpie beträgt jedoch nur etwa 1,7 J/g (siehe [5]). Dies entspricht einer Temperaturänderung von weniger als einem Grad bei Wasser. Da ein Ei zu einem beträchtlichen Teil aus Wasser besteht, liegt die Temperaturänderung in Ei-Inneren während des Gerinnens in der Größenordnung von 1 °C.
Dem entsprechend findet man auch keinen ausgeprägten Bereich konstanter Temperatur bei der Temperatur der Eiweißgerinnung in Abb. 3.

[5] *http://newton.ex.ac.uk/teaching/CDHW/egg/ [25.10.2007]*

[6] *z. B. http://www.br-online.de/wissen-bildung/artikel/0503/27-eier/index.xml*

Literatur

[1] *Unsworth, J. u. Duarte, F. J.*: Heat diffusion in a solid sphere and Fourier theory: An elementary practical example, American Journal of Physics, 47 (11) (1979) 981-983.

[2] *Polley, S. L., Snyder, O. P. a. Kotnour, P.*: A compilation of thermal properties of foods, Food Technology, 34 (11) (1980), 76-94.

[3] *Fisher, L.*: Reise zum Mittelpunkt des Frühstückseis, Lübbe, Bergisch Gladbach 2003

[4] *Berger, R.*: Beispiele zur nichtstationären Wärmeleitung: durch Abschätzungen für die Schule greifbar gemacht, Physik in der Schule, 35 (1997), 73-77

[5] *Roura, P., Fort, J. a. Saurina, J.*: How long does it take to boil an egg? A simple approach to the energy transfer equation, European Journal of Physics, 21 (2000), 96-100.

Anschrift des Verfassers
Prof. Dr. *Roland Berger*, Universität Osnabrück, Fachbereich 4: Physik, Barbarastraße 7, 49076 Osnabrück
E-Mail: roberger@uni-osnabrueck.de