Kann man durch Zugfahren Benzin sparen?

– *oder: Wie ist das mit der Energie bei Bezugssystemwechsel?*

Roland Berger

Mit Energiebetrachtungen bei Bezugssytemwechseln lassen sich leicht drastische Widersprüche zur Alltagserfahrung herbeiführen. So entstandene kognitive Konflikte können gut als Motivationspotential für eine vertiefte Diskussion grundlegender physikalischer Konzepte, wie z.B. der Erhaltungssätze für Energie und Impuls, genutzt werden.

Das dazu im folgenden diskutierte Problem hat ein Schüler einer 11. Jahrgangsstufe im Unterricht aufgeworfen /1/.

Kann man durch Bezugssystemwechsel Energie gewinnen?

Ein relativ zur Erde ruhender Sonnenanbeter S sieht ein mit einer Geschwindigkeit von $v = +v_0 = +10\ \mathrm{ms^{-1}}$ nach rechts (positives Vorzeichen!) fahrendes Auto (Masse 1000kg). Dieses beschleunigt auf $+20\ \mathrm{ms^{-1}}$ (Vgl. die obere Zeile von *Tabelle 1*).

S berechnet die zur Beschleunigung benötigte Energie (vgl. *Tabelle 1*):

$$\Delta E^S = E^S_{nachher} - E^S_{vorher}$$

$$\Delta E^S = 1/2 \cdot 1000\ \mathrm{kg} \cdot (+20\ \mathrm{ms^{-1}})^2 - 1/2 \cdot 1000\ \mathrm{kg} \cdot (+10\ \mathrm{ms^{-1}})^2 = 150\ \mathrm{kJ}$$

Ein zweiter Beobachter Z sieht diesen Beschleunigungsvorgang von einem Zug aus, welcher sich mit $+10\mathrm{ms^{-1}}$ relativ zu S ebenfalls nach rechts bewegt. Vor der Beschleunigung ruht das Auto also für den Beobachter Z. Mit anderen Worten: Auto und Zug bleiben zunächst auf gleicher Höhe. Nach der Beschleunigung hat das Auto für Z dann eine Geschwindigkeit von $+10\mathrm{ms^{-1}}$. Z ermittelt die zur Beschleunigung benötigte Energie und erhält einen Wert von:

$$\Delta E^Z = E^Z_{nachher} - E^Z_{vorher}$$

$$\Delta E^Z = 1/2 \cdot 1000\ \mathrm{kg} \cdot (+10\ \mathrm{ms^{-1}})^2 - 1/2 \cdot 1000\ \mathrm{kg} \cdot (+0\ \mathrm{ms^{-1}})^2 = 50\ \mathrm{kJ}$$ (vgl. *Tabelle 1*)

Dies ist wesentlich weniger als der von S ermittelte Wert. Läßt sich also durch unterschiedliche Art der Beobachtung des Beschleunigungsvorgangs Benzin einsparen? Das sicher nicht! Wo bleibt dann aber der Energieunterschied von 100 kJ (vgl. untere Zeile von *Tabelle 1*)?

Wir haben nicht beachtet, daß das Auto alleine kein abgeschlossenes System ist. Bei der Beschleunigung findet ein Energieaustausch mit der Erde statt. Das Auto stößt sich sozusagen an der Erdkugel tangential ab. Dadurch wird die Rotationsgeschwindigkeit der Erde kleiner, wenn das Auto in Ostrichtung beschleunigt und bei Beschleunigung in Westrichtung größer.

Quantitative Bestimmung des Einflusses der Erde auf die Energiebilanz

Wir betrachten nun den Einfluß der Beschleunigung des Autos auf die Erde. Der Übersichtlichkeit halber rechnen wir mit symbolischen Größen. Zunächst schätzen wir die Geschwindigkeitsänderung der Erde ab.

Von S aus gesehen ist die Drehimpulsänderung des Autos bezogen auf den Erdmittelpunkt betragsmäßig gleich $m(2\,v_0)R - mv_0R = mv_0R$.

Dabei ist m die Fahrzeugmasse und v_0 seine Anfangsgeschwindigkeit (im Beispiel $+10\ \mathrm{ms^{-1}}$). R ist der Erdradius. Wegen der Drehimpulserhaltung ist dies betragsmäßig auch die Drehimpulsänderung der Erde. Dies führt wegen der großen Erdmasse natürlich nur zu einer kleinen Änderung

Tabelle 1

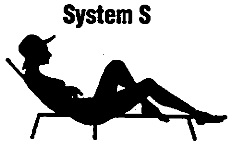
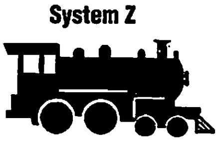
Beobachter	vorher	nachher	Änderung nachher-vorher
System S 	$v = +v_0 = +10\ \mathrm{ms^{-1}}$ $1/2\ mv_0^2$	$v = +2v_0 = +20\ \mathrm{ms^{-1}}$ $1/2m\,(2v_0)^2$	$3/2\ mv_0^2 = 150\ \mathrm{kJ}$
System Z 	$v = 0\ \mathrm{ms^{-1}}$ 0	$v = +v_0 = +10\ \mathrm{ms^{-1}}$ $1/2\ mv_0^2$	$1/2\ mv_0^2 = 50\ \mathrm{kJ}$
		Unterschied System S zu System Z:	**100kJ**

Tabelle 2

Kinetische Energie im	**vorher: Läufer + Gegenstand:**	**nachher: Läufer + Gegenstand:**	**Änderung nachher-vorher**
System S	$\frac{1}{2}mv_0^2+\frac{1}{2}Mv_0^2$	$\frac{1}{2}m(2v_0)^2+\frac{1}{2}M(v_0-\frac{m}{M}v_0)^2$	$\frac{1}{2}mv_0^2\cdot\left(1+\frac{m}{M}\right)$
System Z	0 + 0	$\frac{1}{2}mv_0^2+\frac{1}{2}M(-\frac{m}{M}v_0)^2$	$\frac{1}{2}mv_0^2\cdot\left(1+\frac{m}{M}\right)$

der Erdrotationsgeschwindigkeit von (Θ ist das Trägheitsmoment der als Vollkugel angenommenen Erde):

$$\Delta v=R\frac{\Delta L}{\Theta}=R\frac{mv_0R}{\frac{2}{5}MR^2}=\frac{5}{2}\frac{m}{M}v_0$$

$$\Delta v=2{,}5\cdot\frac{10^3\,\mathrm{kg}}{6\cdot10^{24}\,\mathrm{kg}}\cdot10\,\mathrm{ms^{-1}}\approx4\cdot10^{-21}\,\mathrm{ms^{-1}}$$

Dies ist weniger als ein Nukleondurchmesser pro Tag! Diese Geschwindigkeitsänderung ist so klein, daß wir leicht die Bedeutung der Erde für die Energiebilanz übersehen. Außerdem wird die in der Rechnung stillschweigend verwendete Annahme, daß sich die Geschwindigkeit des Sonnenanbeters nicht ändert, nachträglich gerechtfertigt. Im folgenden wollen wir den Beitrag der Erde zur Energiebilanz untersuchen.

Der Einfachheit halber wird dabei angenommen, daß die Erde vor der Beschleunigung im System S keine Rotationsenergie hat. Dies ändert nichts am Ergebnis: Die anfängliche Rotationsenergie müßte zu jedem Energieterm addiert werden. Bei der Berechnung der uns interessierenden Energieänderungen fällt die Anfangsenergie wieder heraus.

Von S aus gesehen ändert sich die Rotationsenergie der Erde um:

$$\Delta E^s=E^S_{\text{nachher}}-E^S_{\text{vorher}}$$

$$\Delta E^s=\frac{(Drehimpuls^S_{\text{nachher}})^2}{2\Theta}-\frac{0^2}{2\Theta}=\frac{(mv_0R)^2}{2\Theta}$$

Vom Zug aus gesehen hat die Erdkugel vor der Beschleunigung bereits einen Drehimpuls von $\Theta\frac{v_0}{R}$.
Durch die Beschleunigung des Fahrzeugs wird dieser um mv_0R größer. Dies kann man sich folgendermaßen klarmachen: Für Z bewegt sich die Erde nach links. Das Auto beschleunigt nach rechts, sodaß die Erdgeschwindigkeit durch den nach links wirkenden Rückstoß größer wird. Dies erhöht den Drehimpuls der Erde.

Die Energieänderung der Erde von Z aus gesehen ist:

$$\Delta E^Z=E^Z_{\text{nachher}}-E^Z_{\text{vorher}}$$

$$\Delta E^Z=\frac{(\Theta\frac{v_0}{R}+mv_0R)^2}{2\Theta}-\frac{(\Theta\frac{v_0}{R})^2}{2\Theta}$$

$$=mv_0^2+\frac{(mv_0R)^2}{2\Theta}=mv_0^2+\Delta E^S$$

Relativ zu Z hat die Erde also eine um
$mv_0^2 = 1000\,\mathrm{kg}\cdot(10\,\mathrm{ms^{-1}})^2 = 100\,\mathrm{kJ}$
größere Energie als von S aus gesehen. Damit ist die gesamte Energiezunahme des Systems Auto-Erde von beiden Bezugssytemen aus gesehen gleich 150kJ. Der „Einspareffekt" durch Systemwechsel ist in Wirklichkeit nicht vorhanden. Die verbrauchte Benzinmenge ist eine Invariante unter derartigen Systemwechseln. Tatsächlich verteilt sich die Gesamtenergie je nach Beobachter lediglich unterschiedlich auf die beteiligten Teilsysteme Erde und Auto.

Reduktion der Schwierigkeiten

Das folgende Problem ist zum behandelten weitgehend analog. Ein Eisläufer (Masse m) fährt relativ zu S (hier eher ein auf einer Parkbank sitzender Spaziergänger) mit $+v_0$ auf spiegelglattem Eis (dadurch wird die Erde als Energieaustauschreservoir abgekoppelt!) nach rechts. Der Läufer wirft einen Gegenstand (Masse M) so nach links, daß sich seine Geschwindigkeit auf $+2v_0$ vergrößert. Der Gegenstand entspricht der Erde im bereits diskutierten Beispiel. In beiden Fällen wird die Geschwindigkeit des Läufers bzw. des Autos aufgrund des Abstoßens an Gegenstand bzw. Erde vergrößert. Aufgrund der Vergleichbarkeit der beteiligten Massen und der eindimensionalen Verhältnisse ist das Eisläufer-Beispiel für Schülerinnen und Schüler leichter zu durchschauen und zu berechnen.

Aus der Impulserhaltung ersieht man nach einfacher Rechnung, daß der Gegenstand dadurch seine Geschwindigkeit im System S verringert, um

$$-\frac{m}{M}v_0\,.$$

Von einem mit $+v_0$ relativ zu S bewegten System Z aus gesehen ist die Geschwindigkeitsänderung ebenfalls gegeben durch

$$-\frac{m}{M}v_0\,.$$

Dies kann wieder leicht aus dem Impulssatz bestimmt werden. Der tiefere Grund für die Übereinstimmung der Geschwindigkeitsänderungen liegt in der Translationssymmetrie des Problems. Die Überlegungen zur Energiebilanz verlaufen analog zu denen im ersten Beispiel und sind daher nur kurz in *Tabelle 2* zusammengefaßt. Von beiden Systemen aus gesehen muß also die gleiche Energie

$$\frac{1}{2}mv_0^2\cdot\left(1+\frac{m}{M}\right)$$

vom Werfer aufgebracht werden. Stößt die Person einen im Vergleich zur eigenen Masse schweren Gegenstand von sich ($M >> m$) ab /2/, so muß sie die Beschleunigungsenergie 1/2 mv_0^2 aufbringen. Dies ist vom System Z aus, in welchem Gegenstand und Läufer zunächst ruhen, einfach einzusehen: Der Gegenstand ändert seine Geschwindigkeit und damit seine Energie aufgrund seiner großen Masse praktisch nicht. Der Läufer wird auf $+v_0$ beschleunigt und muß dazu eben die Energie 1/2 mv_0^2 aufbringen.

Anmerkung

/1/ Ich danke StD *K. Lippert* für den Hinweis auf dieses Problem.
/2/ Konkret könnte man sich den Fall vorstellen, daß sich der Schlittschuhläufer von einer auf dem Eis stehenden großen Würstchenbude abstößt.

Dipl. Phys. StR Roland Berger
Ludwig-Maximilians-Universität München
Sektion Physik, Lehrstuhl für Didaktik der Physik
Schellingstr. 4, 80799 München