Die Radialgeschwindigkeitsmethode zur Entdeckung von Exoplaneten

Ein Modellexperiment für das Seminarfach Astronomie

Realität und Modell

Pegasi-51b wurde 1995 als erster Planet entdeckt, der einen sonnenähnlichen Stern umkreist. Planeten außerhalb unseres Sonnensystems nennt man Exoplaneten. Zum Einsatz kam die Radialgeschwindigkeitsmethode, mit der bis jetzt 934 weitere Exoplaneten aufgespürt wurden[1]. Mithilfe von Ultraschall kann diese Methode nachgestellt werden.

Prinzip der Methode

Stern und Exoplanet(en) bewegen sich um ihren gemeinsamen Schwerpunkt (Abb. 1)[2]. Da man den viel dunkleren Planet nicht sieht, misst man stattdessen das Licht des Sterns. Wegen des Dopplereffektes ist dieses ein wenig frequenzverschoben. Die empfangene Frequenz f berechnet sich zu:

$f = \frac{f_0}{1+\frac{v}{c}} \rightarrow v = c \cdot \left(\frac{f_0}{f} - 1\right)$; $|v|$ ist die Geschwindigkeitskomponente in Richtung des Auges und c die Lichtgeschwindigkeit. Aus dem zeitlichen Verlauf dieser Radialgeschwindigkeit des Sterns, kann man z. B. auf die Umlaufdauer des Exoplaneten schließen.

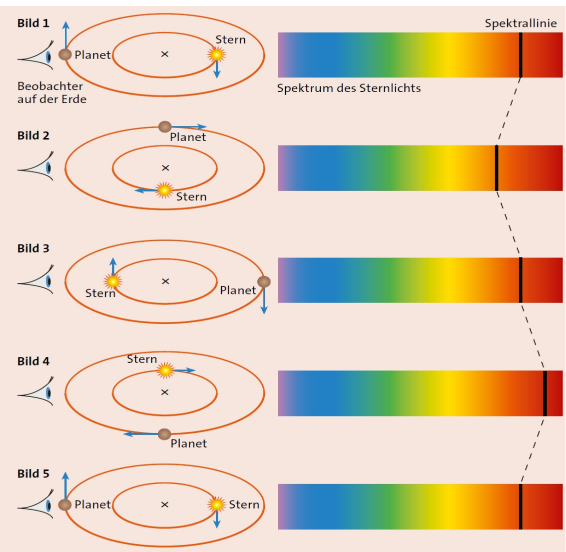


Abb. 1: Prinzip der Radialgeschwindigkeitsmethode

Modell

Im Modell bewegt sich ein Ultraschallsender um den Mittelpunkt des Drehtellers (Abb. 2). Dies entspricht der Bewegung des Sterns um den gemeinsamen Schwerpunkt Stern-Exoplanet. Als Spektrometer dient ein Mikrofon, von dessen Signal, an jeder Position 1 bis 10, ein Fourierspektrum aufgenommen wird (beispielhaft für Position 6 in Abb. 3).

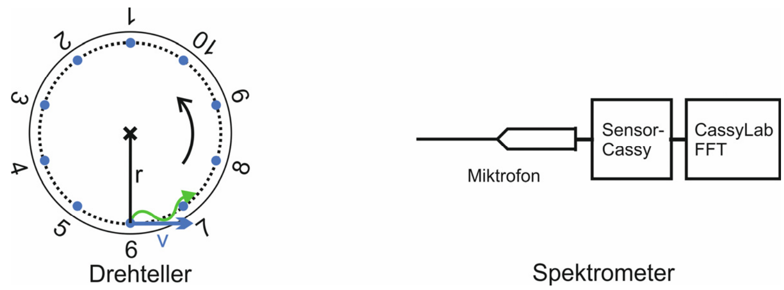
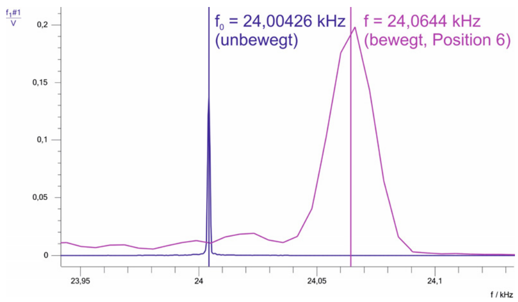


Abb. 2: Die blauen Punkte auf dem rotierenden Drehteller sind die Positionen des Ultraschallsenders, also des Modellsterns, der sich um den gemeinsamen Schwerpunkt Stern-Exoplanet bewegt.



$r = 0{,}1415$ m
c (25,5°C) $= 346{,}6$ m/s
$v_{theo} = -2\pi * r / T$
$= -0{,}889$ m/s
$v_{exp} = c * (f_0 / f - 1)$
$= -0{,}866$ m/s

Abb. 3: Ultraschall-Fourierspektrum von Position 6

Mittels Peakschwerpunktberechnung wurde die verschobene Frequenz (lila, Fehler = 2,6 %) ermittelt, welche als Nr. 6 in Abb. 4 wiederzufinden ist. Daneben sieht man die reale Messkurve von Pegasi-51 (Abb. 5)[3].

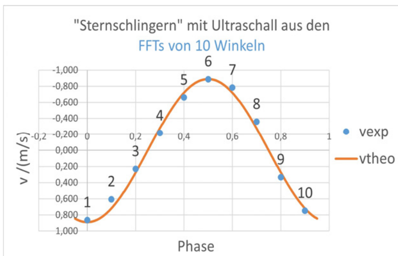


Abb. 4: Endergebnis des Modells
(Die Punkte 1 bis 10 entsprechen denen in Abbildung 2)

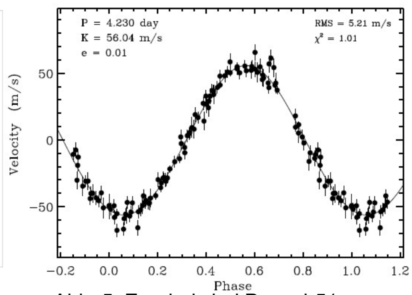


Abb. 5: Ergebnis bei Pegasi-51

[1] Vgl. https://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu/docs/counts_detail.html
[2] Vgl. Sterne und Weltraum Oktober 2011, S. 80
[3] Vgl. The Astrophysical Journal, 481 (1997) S. 927, Fig. 3

Daniel Schwarz, Physikdidaktik
Plakat: Daniel Schwarz

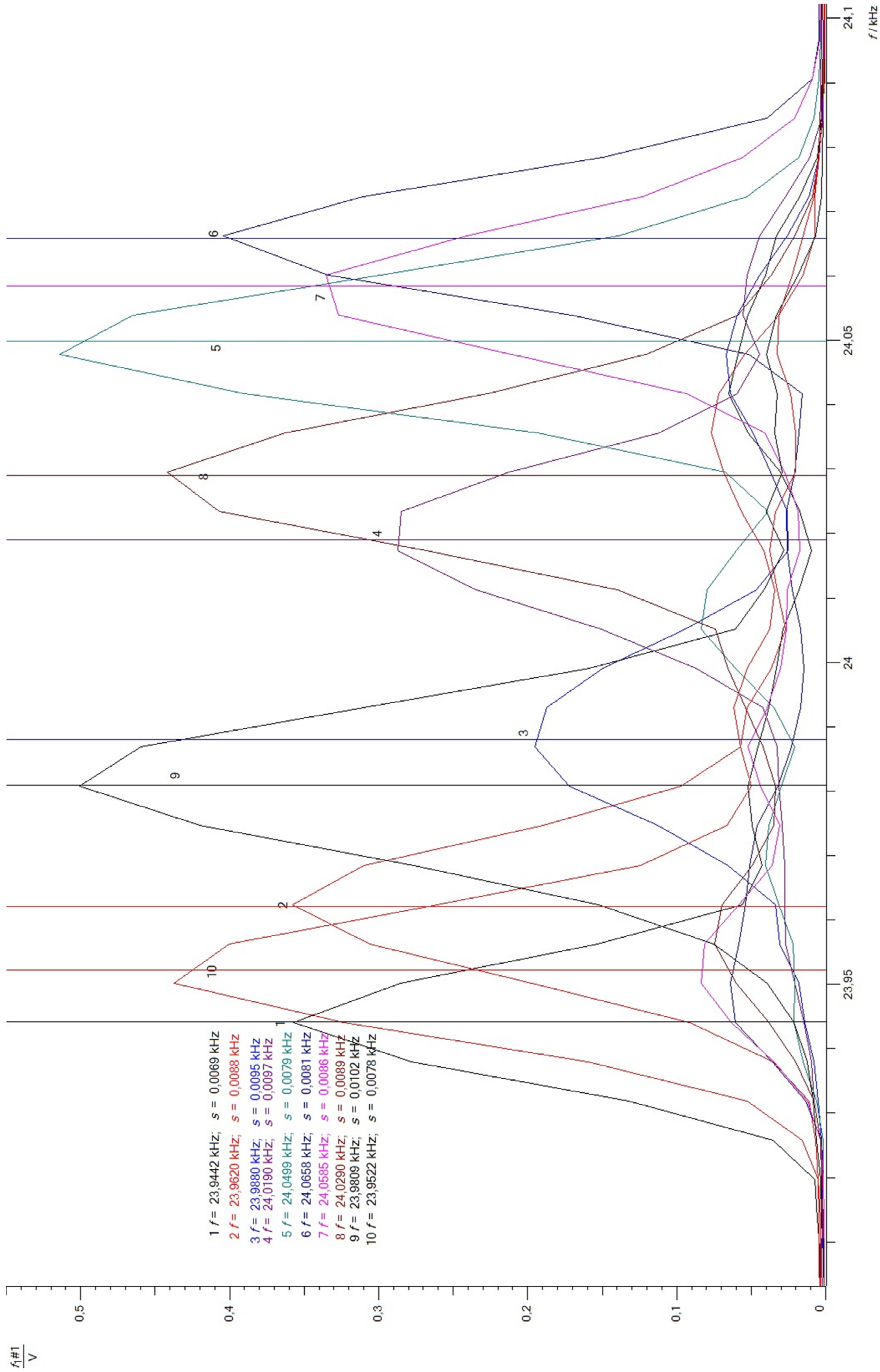
Handout zum Modellexperiment zur Radialgeschwindigkeitsmethode

Physics Teachers Day 22.09.2022

Universität Osnabrück
Physikdidaktik, Prof. Dr. Roland Berger
Daniel Schwarz

Bei Rückfragen erreichen sie mich unter daschwar@uos.de

- Fourierspektren (FFT) der Messungen für die 10 Positionen des Ultraschallsenders, welche für das Exceldiagramm zum Sternschlingern auf dem Poster (Abb. 4) verwendet wurden:

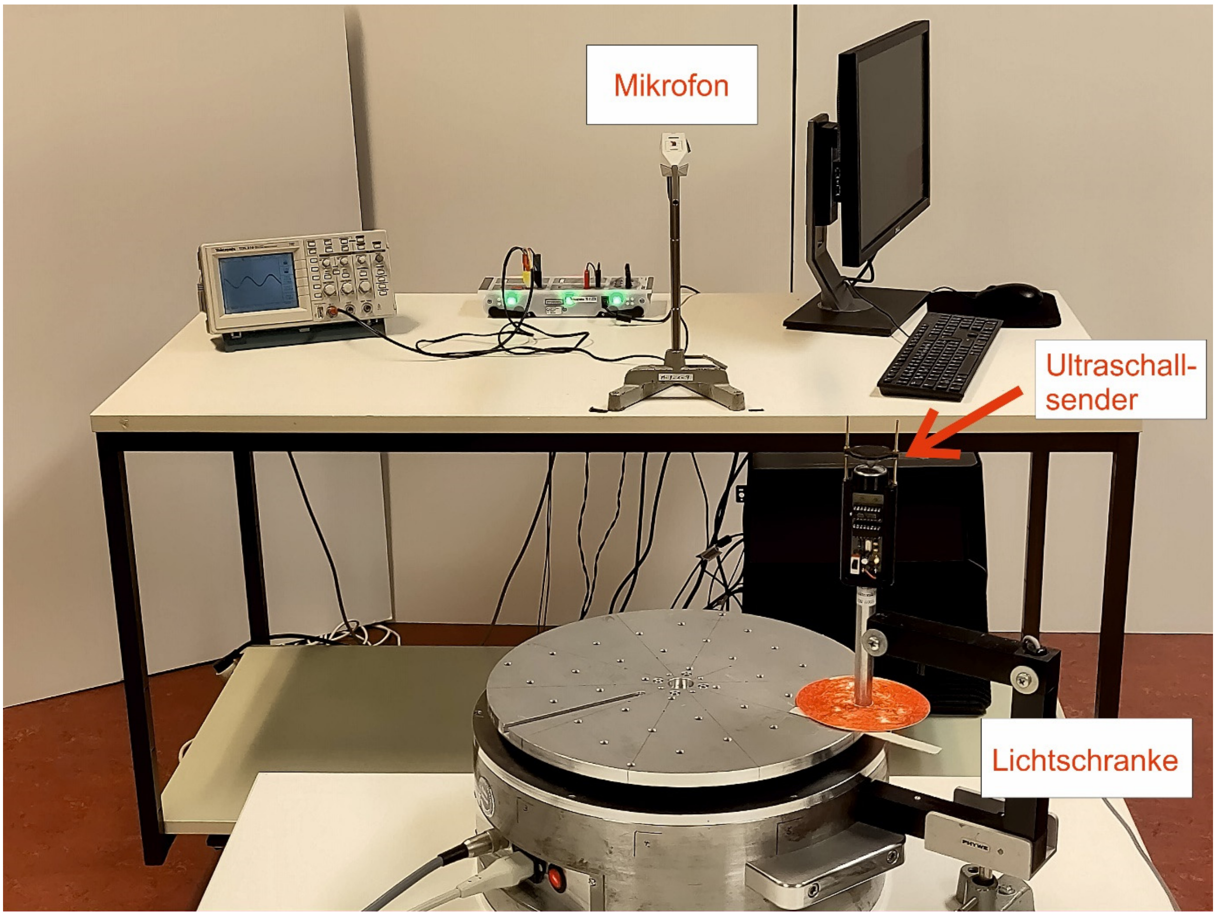


Aufgetragen sind die Amplituden des Mikrofons über der Frequenz.
(Die Sigma, welche bei der Berechnung der Peakschwerpunkte ausgegeben werden, sind unwichtig.)
Jede Messung war 100 ms lang, was bei 1 U/s jeweils ein Zehntel des Umfangs bedeutet, dies hat sich bewährt. (Bei z. B. 0,5 U/s müsste man demnach eine Messzeit von 200 ms einstellen.)
Gestartet wird immer durch Triggerung mit der Lichtschranke am Eingang B, sie muss dabei so ausgerichtet werden, dass sie ein Zwanzigstel des Umfangs vor dem gemessenen Winkel schaltet. Die Positionen der Lichtschranke wurden der Einfachheit halber vorher markiert, so dass diese für die Messungen nur dahin verschoben werden musste, der Motor konnte dabei an bleiben.
(Die Drehzahl bei unserem Gerät wird in Umdrehungen pro Minute angegeben. Deshalb können Werte wie 120, 60, 30 oder 15 U/min eingestellt werden, mit den Messzeiten 50 ms, 100 ms, 200 ms bzw. 400 ms, für eine zehntel Drehung.)

Die Formel für die Theoriekurve im Diagramm auf dem Poster (Abb. 4) lautet:
$v = r \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$; r … Bahnradius; ω … Kreisfrequenz des Drehtellers
Eine Anpassung war nicht notwendig. Siehe Theorie, weiter unten.

- Die Phase ist die Zeit in ganzen Umläufen des Exoplaneten.

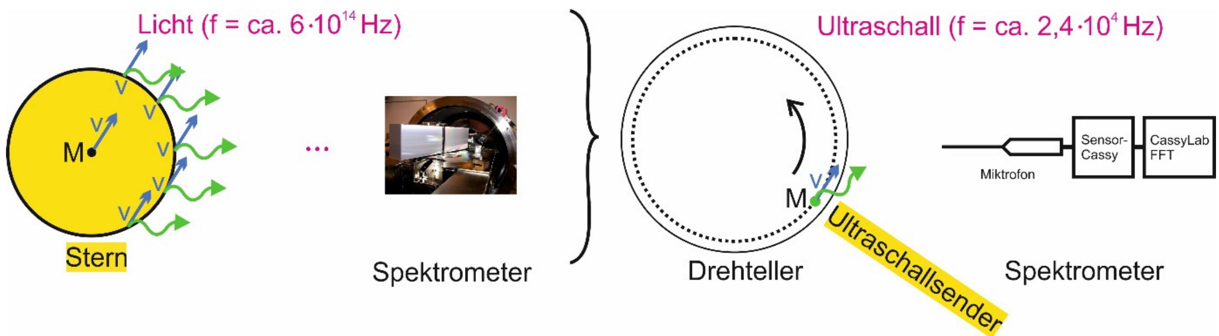
- Zum Einsatz kamen neben dem Ultraschallsender und dem Drehteller, welche unsere Werkstätten gefertigt haben, das Universalmikrofon und das Sensor-CASSY 2 der Firma Leybold, mit der Software CASSY Lab 2 sowie eine Lichtschranke mit Spannungsausgang nebst Versorgung.



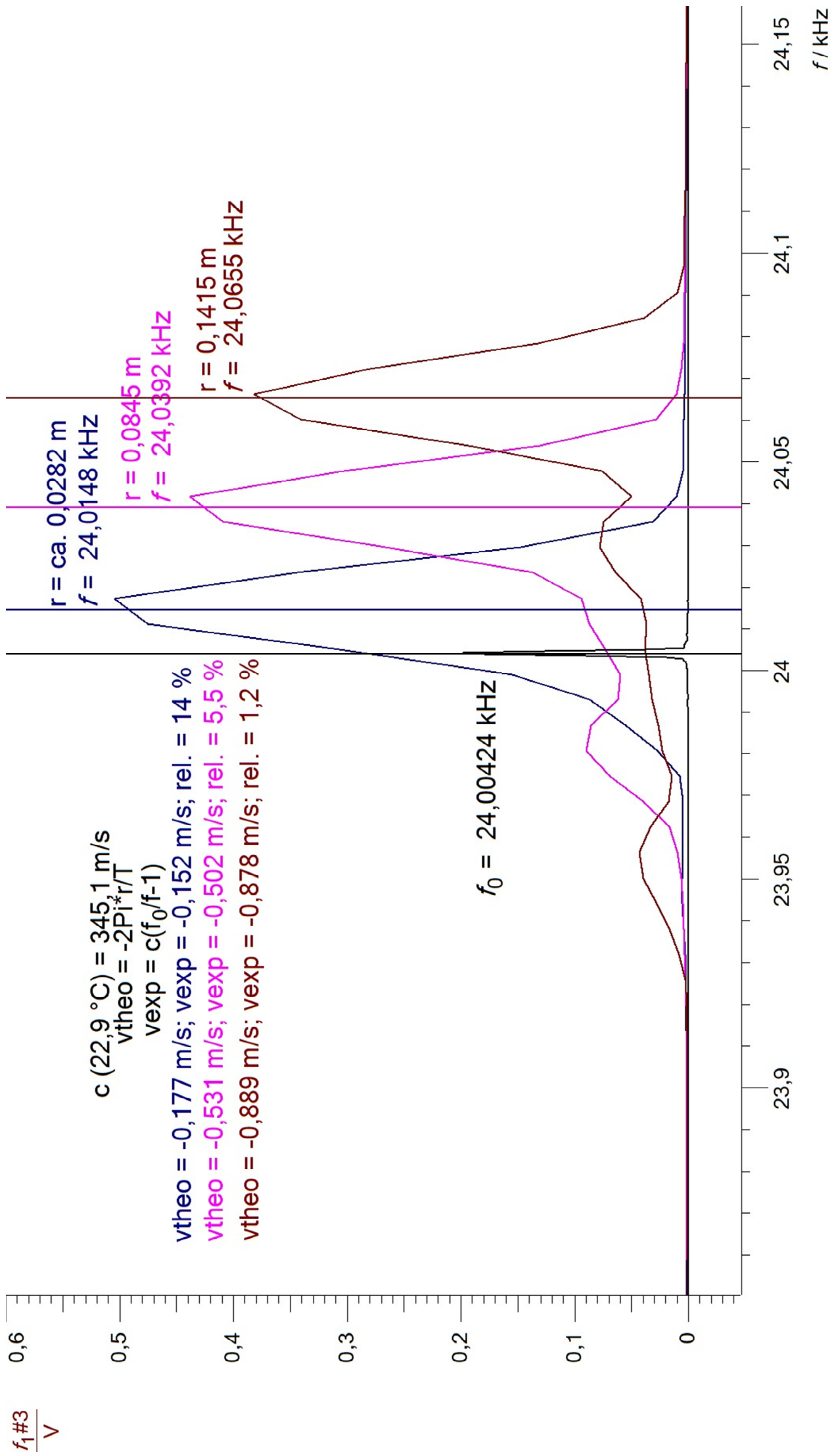
- Möchte man nicht 10 Messungen mit den Auswertungen machen, kann man exemplarisch einfach nur eine bei maximaler Radialgeschwindigkeit durchführen, also 90° zur Sichtlinie, sowie einmal unbewegt mit dann z. B. 2 Sekunden (schmales Maximum im FFT).
  Die Geschwindigkeit kann dann mit der tatsächlichen $v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$ verglichen werden, siehe Poster auf Abb. 3 (Abweichung knapp 3 %.)
  Der Abstand betrug einen Meter, was ausreichend groß ist. Bei kleinerem Abstand gibt es wegen der Geometrie irgendwann eine Abweichung (siehe Theorie zum relativen Fehler, weiter unten) – man kann aber die Messzeitmitte an der Tangente zum Mikrofon einstellen, dann gibt es keinen Fehler durch die Geometrie.

- Da die Zeitauflösung eines Fourierspektrums besser als $\frac{1}{2f}$ sein muss, ist für den 24-kHz-Transducer ein Messintervall von höchstens 20 µs zu wählen. Möglicherweise sind 5 µs noch besser, da hier das Maximum etwas schlanker zu werden scheint.
  Die 25-kHz-Transducer, die es öfter am Markt gibt, sind deshalb eher ungünstig, insbesondere für die Sterneigenrotation (wegen der hier langen Messzeit).
  Bei Anschluss einer Lichtschranke halbiert sich die maximal mögliche Anzahl von Messpunkten.
  (Ohne Lichtschranke hat man bei 20 µs weniger als 400000 und bei 5 µs etwas mehr als 200000 Messwerte mit dem Sensor-CASSY 2. Beim älteren Sensor-CASSY sind für kleine Messzeiten nur 16000 Messwerte pro Eingang angegeben, das Sternschlingern sollte dann aber immer noch messbar sein, aber nicht für 15 U/min = 20000 Messpunkte.)

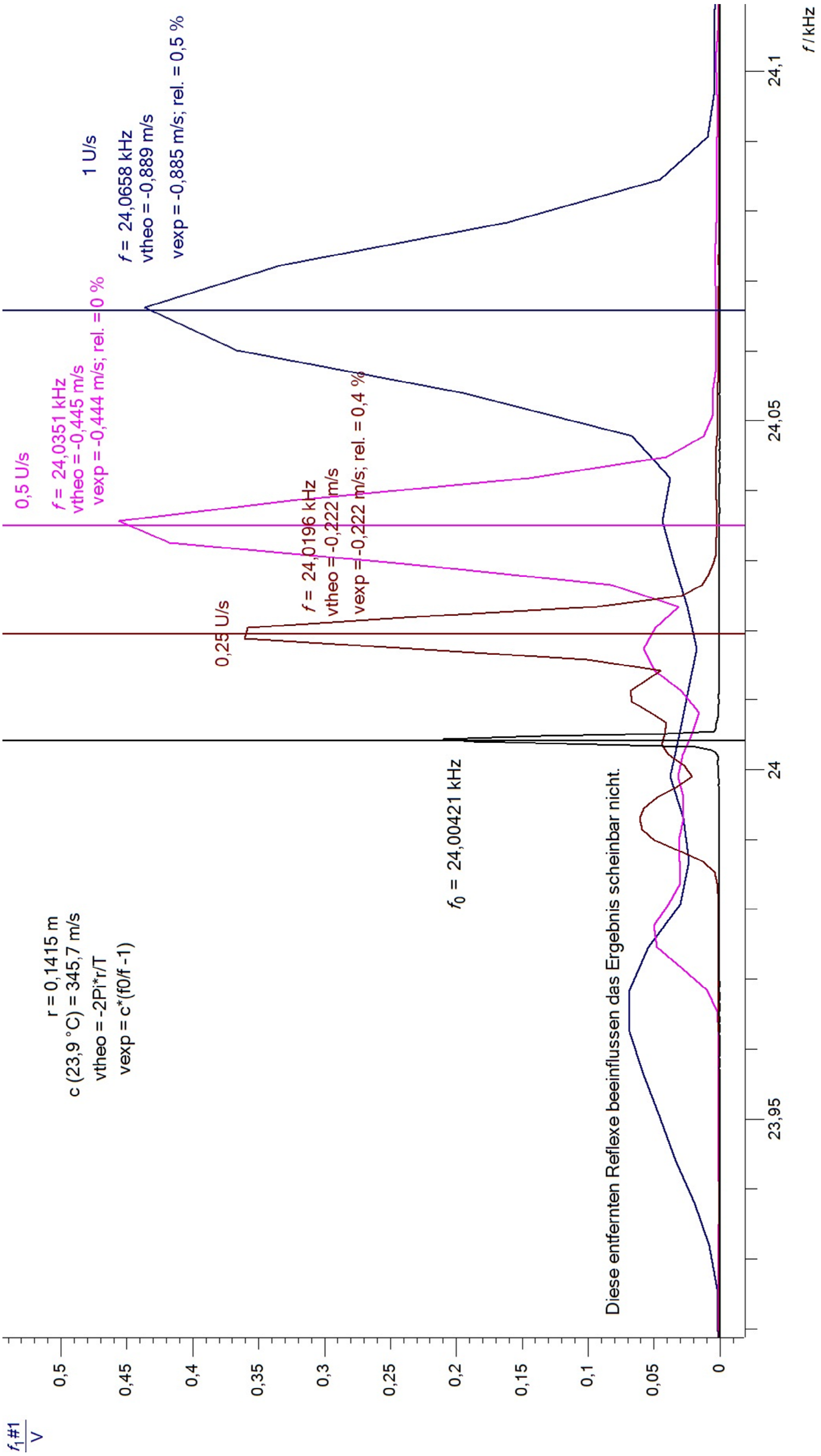
- Gegenüberstellung von Realität und Modell zu einem Zeitpunkt, und zwar für die Sternschlingermessung (Exoplanet nicht eingezeichnet). “M“ bezeichnet den Mittelpunkt von Stern bzw. Ultraschallsender:



- Variation der Bahnradien (bei jeweils maximaler Radialgeschwindigkeit; 1 U/s):



- Variation der Drehzahlen (bei jeweils maximaler Radialgeschwindigkeit):



- Reflexe können zu Messfehlern führen, so hatte ich bei der Messung oben (bei 1 U/s) erst einen Fehler von 8 % in der Geschwindigkeit, nach auslegen von Noppenschaumstoff, an der vermuteten Reflexstelle auf dem Tisch, nur noch 4 % und nach Positionierung des Drehtellers an der Tischkante nur noch 0,5 %.
  Je kleiner der Radius ist, desto größer werden solche Fehler (da die Zeiten gleich bleiben, aber der gewünschte Effekt kleiner wird).

- Warum sind die Maxima so breit?
  Die Küpfmüllersche Unschärferelation besagt: $\xi_t \cdot \xi_\omega \geq \frac{1}{2}$

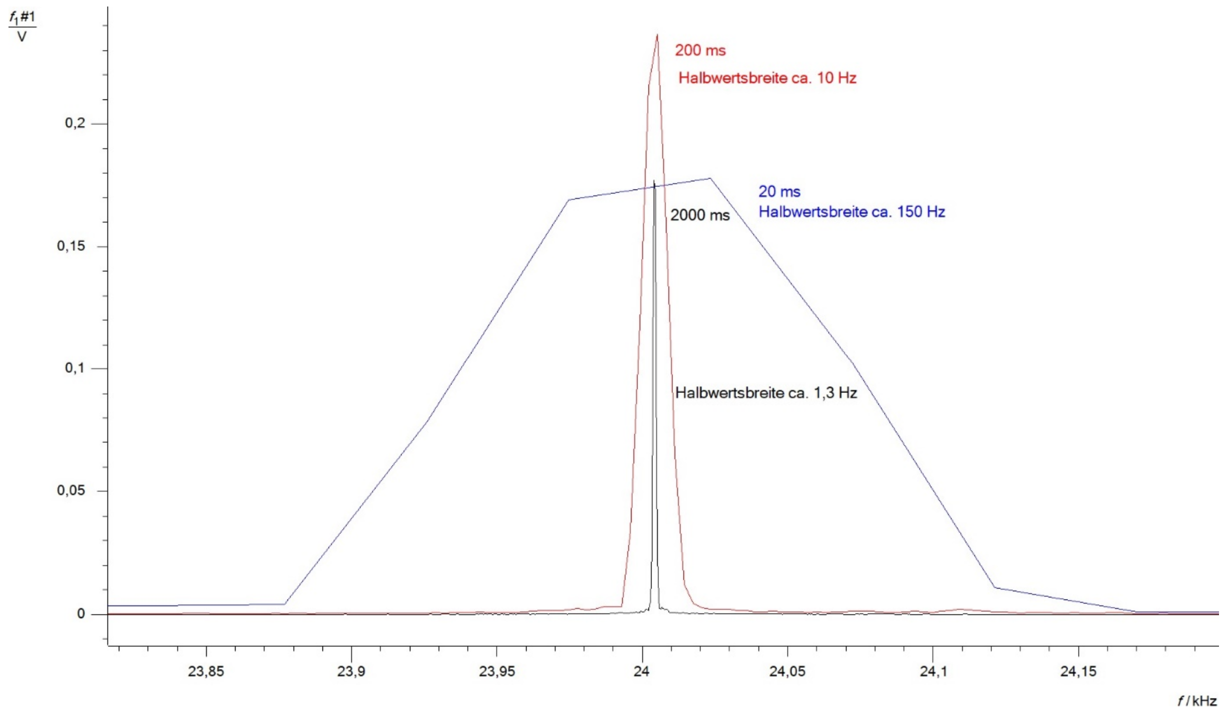
  ξ_t charakterisiert die zeitliche Ausdehnung und

  ξ_ω charakterisiert die spektrale Ausdehnung

  D.h. je größer der eine Faktor wird, desto kleiner wird der andere.

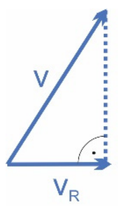
  Hat man beispielsweise einen Gauss-Impuls so gilt: $\sigma_t \cdot \sigma_\omega = 1$

  Die Faktoren hier sind die dazugehörigen Standardabweichungen.

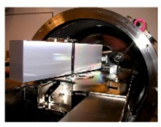


Die spektrale Auflösung ist in der Realität auch ein Problem, aber wegen der großen Frequenz (ca. $6 \cdot 10^{14}$ Hz) wird sie dort nicht relevant durch die Messzeit begrenzt, sondern durch das Spektrometer selbst. Um die Genauigkeit zu erhöhen, werden teilweise tausend Absorptionslinien eines Spektrums vermessen.

- Was ist eigentlich die Radialgeschwindigkeit?
  Der Betrag der Radialgeschwindigkeit ist die Komponente der Sternbahngeschwindigkeit, welche in Richtung der Erde zeigt:

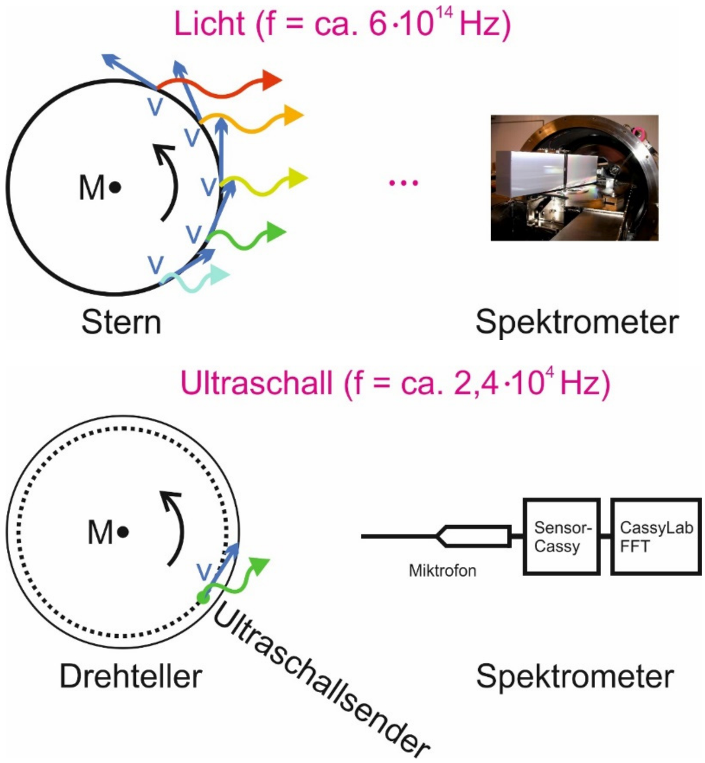


...



Spektrometer

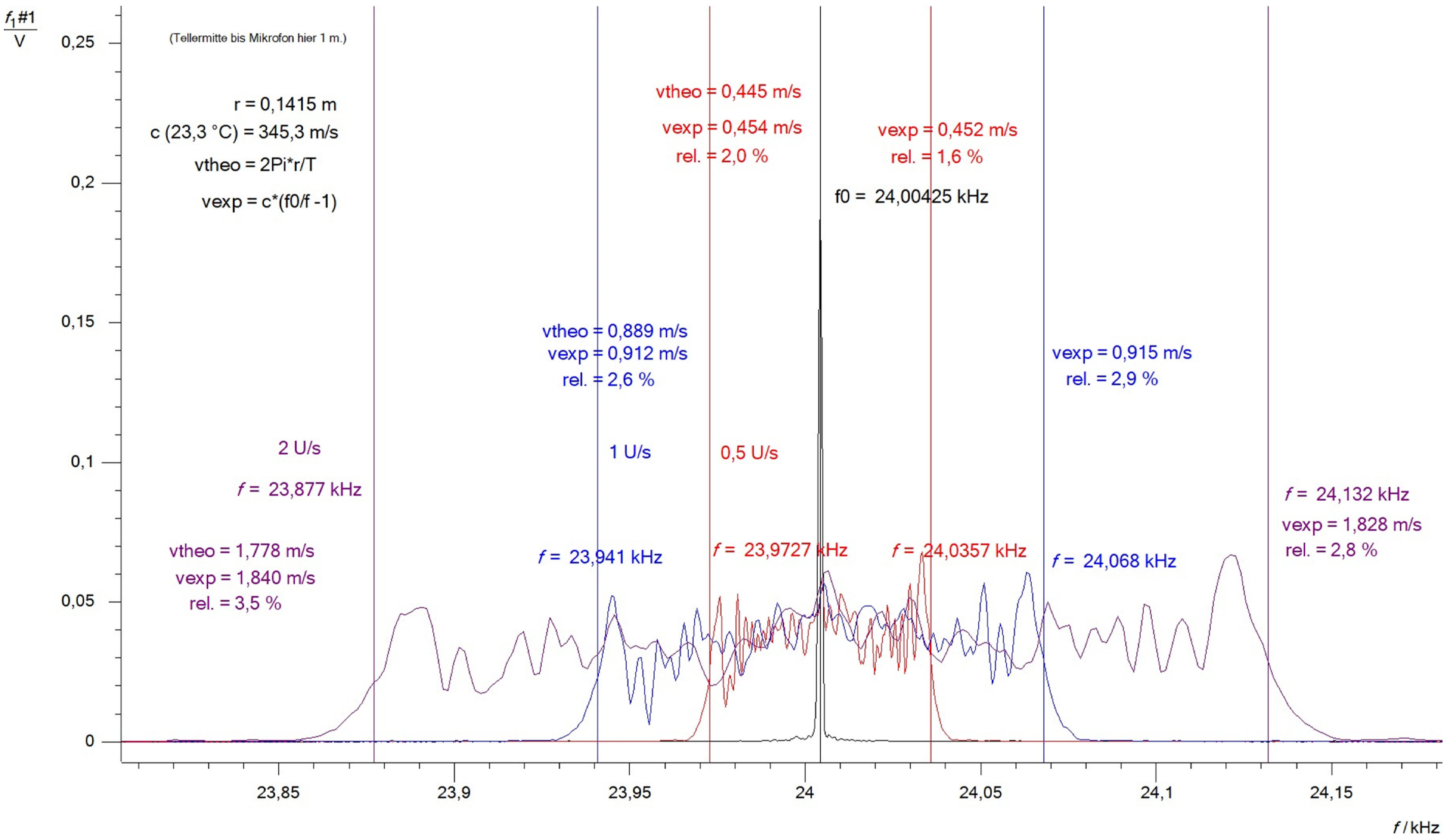
- Es spielt auch die Rotation des Sterns um seine eigene Achse eine Rolle. Z. B. hat der Stern Trappist-1, bei dem mit der Transitmethode bereits mehrere Exoplaneten nachgewiesen wurden, eine projizierte äquatoriale Rotationsgeschwindigkeit von 6 km/s. Im Vergleich zu den nur 2,6 m/s, die durch den Exoplaneten Trappist-1b hervorgerufen werden, ist das sehr viel. Es ergibt sich, wegen der verschiedenen Radialgeschwindigkeiten der zugewandten Sternoberfläche, ein Kontinuum von verschobenen Frequenzen, welches offensichtlich das Aufspüren von Exoplaneten mittels der Radialgeschwindigkeitsmethode stört.



Diese Rotation kann man im Versuch ebenfalls nachstellen, indem man einfach während ganzer Umdrehungen misst (gepunkteter Kreis im Bild). Möchte man ein einigermaßen symmetrisches FFT haben, muss man mit der Lichtschranke bei dem Winkel starten, bei dem die Radialgeschwindigkeit gerade Null ist, also auf der gegenüberliegenden Seite vom Mikrofon. Der Grund ist, dass CASSY Lab für das FFT die eingehenden Amplituden über der Zeit gewichtet, und zwar am Anfang und Ende der Messzeit mit Null und in der Mitte maximal (Kaiser-Bessel-Wichtung(4.0)).
Die Minimal- und Maximalfrequenz können mit senkrechten Linien ermittelt werden. Wegen der Küpfmüllerschen Unschärferelation, ist der linke und rechte Rand des FFTs etwas auslaufend (bei diesen Frequenzen bzw. Drehtellerwinkeln ist der Sender schließlich nicht sehr lange). Bewährt hat sich, die Linien dort bei der halben Höhe zu setzen. Hier darf man ohne weiteres auch einen kleinen Mikrofonabstand wählen, da die minimale und maximale Frequenz so trotzdem mit gemessen wird.
(15 U/min kann man hier mit der Lichtschranke nicht mehr nehmen, da man so zu viele Messwerte benötigt).

(In der Realität strahlen die zugewandten Teile des Sterns gleichzeitig Licht ab, während im Modell der Ultraschallsender alle Winkel nacheinander abfährt, und zwar für eine ganze Umdrehung.)

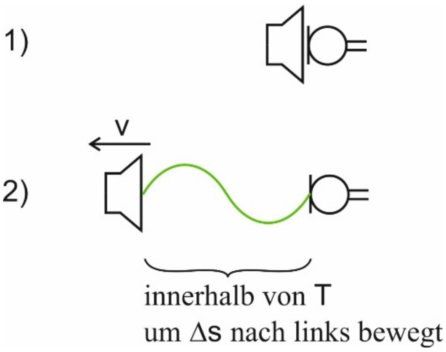
Im folgenden Diagramm sind die Sternrotationsmessungen zu sehen, der Fehler liegt so bei etwa 3 %:



f1#1 / V
0,25
0,2
0,15
0,1
0,05
0
(Tellermitte bis Mikrofon hier 1 m.)
r = 0,1415 m
c (23,3 °C) = 345,3 m/s
vtheo = 2Pi*r/T
vexp = c*(f0/f -1)
vtheo = 0,445 m/s
vexp = 0,454 m/s
rel. = 2,0 %
vexp = 0,452 m/s
rel. = 1,6 %
f0 = 24,00425 kHz
vtheo = 0,889 m/s
vexp = 0,912 m/s
rel. = 2,6 %
vexp = 0,915 m/s
rel. = 2,9 %
2 U/s
1 U/s
0,5 U/s
f = 23,877 kHz
f = 24,132 kHz
vexp = 1,828 m/s
rel. = 2,8 %
vtheo = 1,778 m/s
vexp = 1,840 m/s
rel. = 3,5 %
f = 23,941 kHz
f = 23,9727 kHz
f = 24,0357 kHz
f = 24,068 kHz
23,85
23,9
23,95
24
24,05
24,1
24,15
f / kHz

- Quadriert man die Amplituden (für das Sternschlingermodell), welche in das FFT eingehen, sieht dieses wesentlich besser aus, allerdings bemerkt man dann störende Reflexe nicht mehr. Aufgetragen ist nun das Quadrat der Mikrofonspannung, welches proportional zum quadrierten Schalldruck und damit zur Schallintensität ist. Dies entspräche eher der Realität, da ein optisches Spektrometer Lichtintensitäten (in Abhängigkeit von der Wellenlänge) misst. Um das Vorgehen durchschaubarer zu gestalten, und um störende Reflexe eher zu sehen, wurde hier auf das Quadrieren (welches in CASSY Lab aber einfach ist) verzichtet.

- Dopplereffekt für bewegten Sender:



$s = s_0 + \Delta s;\ s_0 = c \cdot T = \lambda_0$

$\Delta s = v \cdot T$

$s = \lambda$

$\rightarrow \lambda = T(c + v)$

$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{T(c+v)}{T \cdot c} = 1 + \frac{v}{c} = \frac{f_0}{f}$

$\rightarrow \underline{\underline{f = \frac{f_0}{1+\frac{v}{c}}}}$

In der anderen Richtung ist v negativ.

- Die Schallgeschwindigkeit c von Luft, welche in die Dopplereffektformel eingeht, hängt etwas von der Temperatur ab. Auf dieser Internetseite kann man sie sich ausgeben lassen:

  http://www.sengpielaudio.com/Rechner-schallgeschw.htm

  Statt eines Kommas ist hier ein Punkt zu verwenden.

- In der Realität ermöglicht die Kombination von Transit- und Radialgeschwindigkeitsmethode eine Massen- und Dichtebestimmung des Exoplaneten.

- Am 07.09.2022 wurden hier 24 kHz -Transducer angeboten:

  1)
  https://www.electronicsurplus.com/panasonic-matsushite-efr-od24k2-transducer-ultrasonic-24khz-new
  Panasonic/Matsushite - EFR-OD24K2 - Transducer, ultrasonic. 24kHz. New.
  Für $3.95 das Stück zzgl. Zoll etc. aus den USA

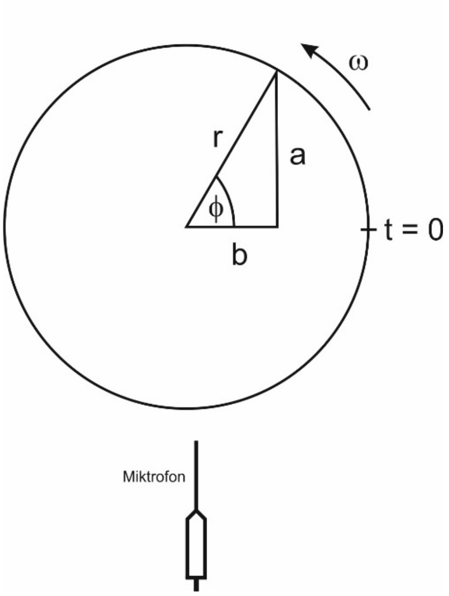
2)
https://www.ebay.de/itm/153963578339?hash=item23d8f1c3e3:g:aMkAAOSwgtpe3SiJ&amdata=enc%3AAQAHAAAAsCqQmofQsUk%2BjIRemAOPncMkuaGMEt7Dwn1BZC12n8jyhxu3Tc%2BLdkhmIhykaMHUs4vA9fJJlXJhd6GjXP9Ber4pHuSVcnZ2sgHuaQVhgvqgFsjlbwJcD5N%2B4lfUCIKVZFfK%2BEgJk6E2%2BywjS4abRjjlXxBNKbRf7sZSbRjG2Ik%2BQwZXpb7njLbS%2FreBLElCvkIS0txtSmoRSNGR9C7JMpjVaDWL89WAmLbOZ%2BAybivo%7Ctkp%3ABk9SR8Ty9uviYA
Panasonic Ultraschall Wandler efr-odb24k2 10pcs
also 10 Stück für £24,00 (27,84€) zzgl. Versand aus Rumänien für £10,00 (ca. EUR 11,60)
3)
https://www.ebay.de/itm/265783786360?_trkparms=amclksrc%3DITM%26aid%3D1110006%26algo%3DHOMESPLICE.SIM%26ao%3D1%26asc%3D20200818142055%26meid%3Daa82eb2d9b0545049ade60850a6ffd84%26pid%3D101113%26rk%3D3%26rkt%3D12%26sd%3D332421906240%26itm%3D265783786360%26pmt%3D0%26noa%3D1%26pg%3D2563228%26algv%3DDefaultOrganicWeb%26brand%3DMarkenlos&_trksid=p2563228.c101113.m2108
3 Stück Ultraschall Sensoren Murata MA40A5S 2 Stück 0D24K2
4 Euro zzgl. 1,95 € Versand (Schnäppchen)

- Das Platinenlayout und die 3D-Druckdatei für das Gehäuse werden auf den Seiten der Physikdidaktik zu finden sein.
  Für den 3D-Druck wurde das Programm Ultimaker Cura verwendet. Dieses ist kostenlos und das meistverwendete 3D-Druck-Programm.

- Vorläufer des Versuchs war der Dopplereffekt mit einer linearen Bewegung, mithilfe einer Pendelzugsteuerung und eines Digitalzählers, welcher von Michael Frenzel angeregt wurde und lange Zeit in einer Vitrine im Physikfoyer aufgebaut war.

- Theorie:

für unendlichen Abstand:



$$v \approx \frac{a}{\Delta t}; a = r \cdot sin\varphi$$

$$v = \dot{a}$$

$$\varphi = 2\pi \cdot \frac{t}{T} = \underline{\omega \cdot t}$$

$$\rightarrow v = \frac{r \cdot sin\varphi}{dt}$$

$$v = r \cdot \cos{(\omega \cdot t)} \cdot \omega$$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{v = r \cdot \omega \cdot \cos{(\omega \cdot t)}}}};$$ ← Theorieformel

$Näherungsansatz: \frac{1}{1+\varepsilon} \approx 1-\varepsilon$

$\rightarrow f \approx f_0\left(1-\frac{v}{c}\right)$

$\underline{\Delta f \approx -f_0 \cdot \frac{v}{c} \rightarrow \Delta f \sim ca. -v\ bzw. -cos\varphi}$

$\dot{v} = r \cdot \omega \cdot (-\sin(\omega \cdot t)) \cdot \omega$

$\dot{v} = -r \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t)$

$\underline{\dot{\Delta f} \sim ca. sin\varphi}$

Sterneigenrotation:

$\rightarrow \dot{\Delta f}\ ist\ bei\ \varphi = 0\ und\ \pi\ gleich\ 0$

$\rightarrow |\Delta f|_{max}$ länger als $|\Delta f|_{min}$

Deshalb ist im FFT die Amplitude außen tendenziell größer als innen.

Herleitung der Elongation El:

$$f = \frac{f_0}{1+\frac{v}{c}}$$

$$\rightarrow f = f_0 \cdot \frac{1}{1+\frac{r \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)}{c}}$$

$\dot{\alpha} = \omega_U(t)$ … Ultraschall (nicht mit ω verwechseln)

$\rightarrow \alpha = \int \omega_U(t)$ dt … Ultraschallphase

Betrachtung der Momentanfrequenz:

$$\omega_U(t) = 2\pi \cdot f_0 \cdot \frac{1}{1+\frac{r \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)}{c}}$$

$$\underline{\rightarrow \alpha = -4\pi \cdot f_0 \cdot c \cdot \frac{tanh^{-1}\left(\frac{(c-r\cdot\omega)\cdot tan\left(\frac{\omega \cdot t}{2}\right)}{\sqrt{r^2 \cdot \omega^2 - c^2}}\right)}{\omega \cdot \sqrt{r^2 \cdot \omega^2 - c^2}} + \alpha_0}$$

$El = A \cdot sin\alpha$

einfacher: $\underline{\underline{El = \sin\left(a \cdot tanh^{-1}(b \cdot \tan(d \cdot t))\right)}}$

mit: $a = \frac{-4\pi \cdot f_0 \cdot c}{\omega \cdot \sqrt{r^2 \cdot \omega^2 - c^2}}; b = \frac{(c - r \cdot \omega)}{\sqrt{r^2 \cdot \omega^2 - c^2}}; d = \frac{\omega}{2}$

(Die Amplitude A und die Ultraschallphasenlage α_0 sind nicht so wichtig.)

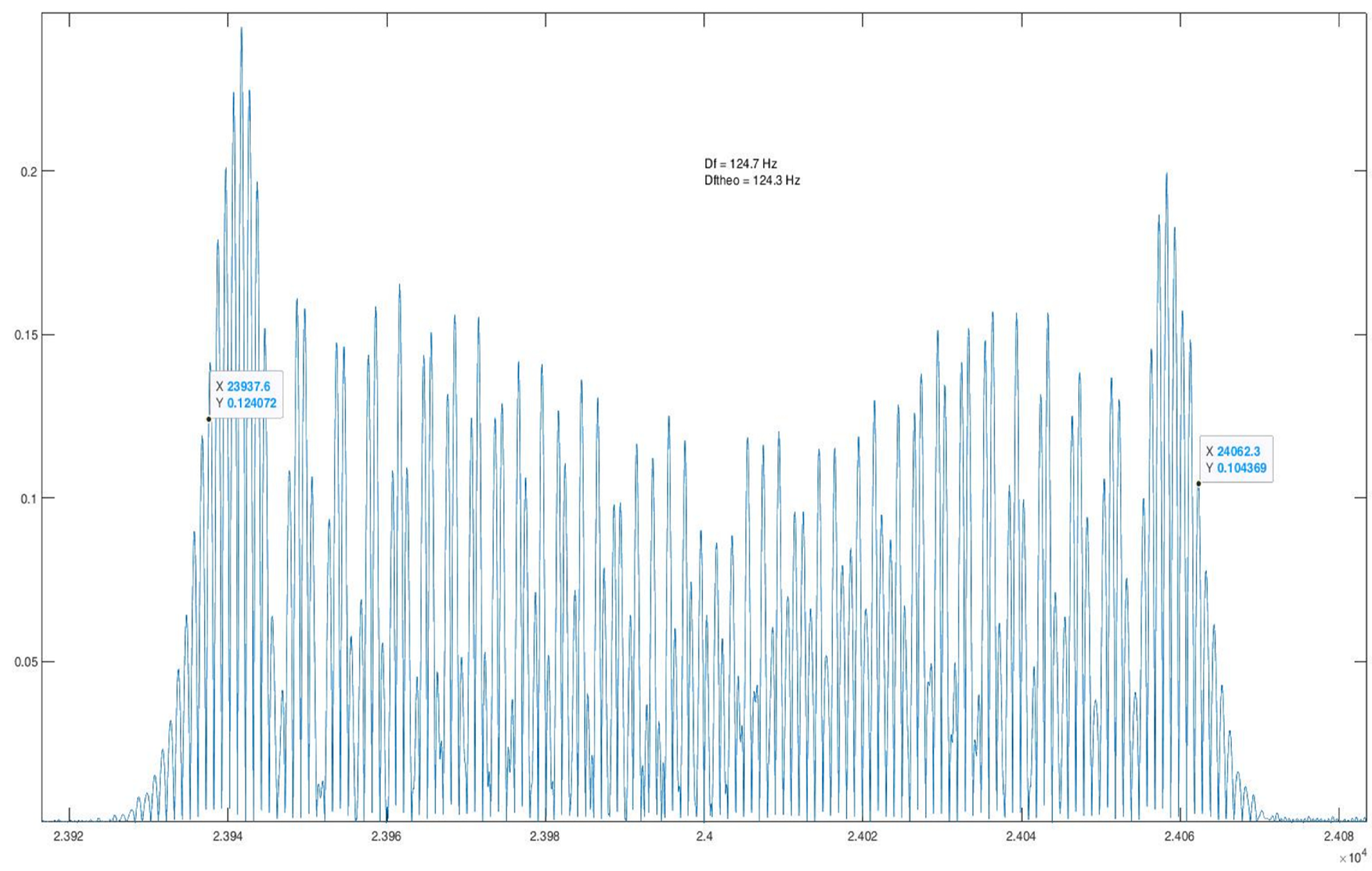
Herleitung der Zeit(Frequenz)

$$\frac{f_0}{f} - 1 = \frac{r \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)}{c}$$

$$\frac{c}{r \cdot \omega}\left(\frac{f_0}{f} - 1\right) = \cos(\omega \cdot t)$$

$$\underline{\underline{t = \frac{arccos\left(\frac{c}{r \cdot \omega}\left(\frac{f_0}{f} - 1\right)\right)}{\omega}}}$$

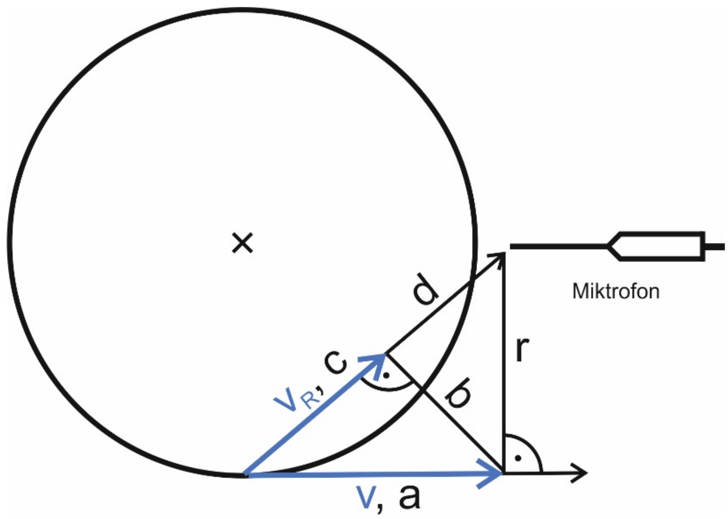
Mit der Formel für die Elongation El kann man z. B. mit Matlab ebenfalls ein nun theoretisches FFT erzeugen. Wie man sieht, stimmt die Frequenzdifferenz zwischen Minimal- und Maximalfrequenz (wieder auf halber Höhe ermittelt) gut mit der erwarteten überein. Die vielen Maxima alle genau 1 Hz, rühren vom Zeitfenster von 1 s her, welches hier keine Gewichtung wie CASSY Lab hat:


Df = 124.7 Hz
Dftheo = 124.3 Hz
X 23937.6
Y 0.124072
X 24062.3
Y 0.104369
0.2
0.15
0.1
0.05
2.392
2.394
2.396
2.398
2.4
2.402
2.404
2.406
2.408
×10^4

Relativer Fehler durch die Geometrie bei endlichem Abstand Drehtellermitte-Mikrofon, für die Sternschlingermessung

Der Fehler wird hier für die theoretisch maximale Radialgeschwindigkeit v_R berechnet, wenn der Messpunkt sich gerade 90° zur Sichtlinie (Drehtellermitte-Mikrofon) befindet. (Falls man den Messpunkt an die Tangente Kreisbahn-Mikrofon positioniert, ist dieser Fehler = Null.) Bei der Messung der Sterneigenrotation, tritt dieser Fehler nicht auf, da dann alle Frequenzen gemessen werden.

(Der weitere kleine Fehler durch die Messzeit = 1/10 T – so dass man keinen wirklichen Messpunkt bei unendlich kleiner Messzeit hat, wurde hier nicht mit berücksichtigt.)



a … Abstand Drehtellermitte-Mikrofon
r … Radius der Kreisbahn
v … Geschwindigkeit des Ultraschallsenders
v_R … tatsächlich aus der Frequenzmessung ermittelte Geschwindigkeit, die Radialgeschwindigkeit

$$c = \sqrt{a^2 + r^2} - d$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$d = \sqrt{r^2 - b^2}$$

$$\rightarrow \sqrt{a^2 + r^2} - d = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$\rightarrow \sqrt{a^2 + r^2} - \sqrt{r^2 - b^2} = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$a^2 - b^2 = a^2 + r^2 - 2\sqrt{a^2 + r^2}\sqrt{r^2 - b^2} + r^2 - b^2$$

$$-2r^2 = -2\sqrt{a^2r^2 - a^2b^2 + r^4 - b^2r^2}$$

$$4r^4 = 4a^2r^2 - 4a^2b^2 + 4r^4 - 4b^2r^2$$

$$0 = -a^2b^2 - b^2r^2 + a^2r^2$$

$$0 = b^2(-a^2 - r^2) + a^2r^2$$

$$0 = b^2 - \frac{a^2 r^2}{a^2 + r^2}$$

$$b^2 = \frac{a^2 r^2}{a^2 + r^2}$$

$$\rightarrow c = \sqrt{a^2 - \frac{a^2 r^2}{a^2 + r^2}}$$

$$\underline{\underline{\frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2 + r^2}}}}$$

Der relative Fehler für die zu ermittelnde Geschwindigkeit v_R ist:

$$\delta = \frac{v_R - v}{v} = \frac{c}{a} - 1$$

Für r = 0,1415 m und a = 1 m ergibt sich ein systematischer, relativer Fehler von -1 %.
Der Wert für die ermittelte Geschwindigkeit ist kleiner als die tatsächliche, dies ist bei den Sternschlingermessungen auch der Fall.